Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen de théorie

20 Août 2022

Nom : Prénom : Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer votre **nom** et votre **prénom** sur **chaque** feuille. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'entièreté du questionnaire, qui compte 13 pages numérotées de 1 à 13, dont 4 pages de brouillon. Veuillez rendre à la fin de l'examen l'ensemble des 13 pages **dans l'ordre correspondant à leur numérotation**.*

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération.

Remarques :

— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez **toutes les sous-questions**, beaucoup sont indépendantes.*
— ***Justifiez** vos développements et **expliquez** vos démarches.*
— *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*
— *L'examen dure **1h30**.*

T1 : Classification des systèmes d'EDPs (5 Points)

On considère le système de N équations aux dérivées partielles suivant :

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\left(x, t, \mathbf{u}\right)\mathbf{u}_x = \mathbf{h}\left(x, t, \mathbf{u}\right)$$

avec **u** un vecteur contenant les N fonctions inconnues, **A** une matrice $N \times N$ et **h** un vecteur de dimension N.

1. Quel est l'ordre de ce système ? Justifier.

2. Ce système est-il linéaire ou non linéaire ? Justifier.

3. Ce système est-il homogène ou non homogène ? Justifier.

4. Quelle opération mathématique faut-il effectuer pour pouvoir classifier ce système (ex. hyperbolique, elliptique, parabolique, hybride, ...) ?

5. Sous quelle(s) condition(s) ce système est-il hyperbolique ?

Nom : Prénom :

T2 : Analyse de Von Neumann (10 Points)

Une approximation par différences finies de l'équation de diffusion $u_t = u_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = (1-\theta)\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \theta\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

avec $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel.

1. Ce schéma d'approximation est-il explicite ou implicite ? Justifier.

2. Quel est l'ordre de précision de ce schéma d'approximation ? Expliquer.

3. Grâce à une analyse de Von Neumann, étudier la stabilité de ce schéma numérique.
   (a) Pour ce faire, il vous est tout d'abord demandé de donner l'expression du facteur d'amplification du schéma, en fonction du paramètre θ, d'un nombre d'onde k, du pas spatial Δx et du paramètre suivant : $s = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

(b) Ensuite, veuillez discuter les valeurs que peut prendre le facteur d'amplification, et tirer des conclusions concernant la stabilité du schéma. Interpréter.

T3 : Fonction de Green (7 Points)

1. Si la fonction $Q(x,t)$ est la solution du problème de diffusion sur l'axe réel avec comme condition initiale une fonction échelon, la fonction $u(x,t)$ donnée par l'expression ci-dessous est-elle aussi une solution de l'équation de diffusion ? Justifier.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\,\phi(y)\,dy$$

où la fonction S est la dérivée partielle par rapport à x de la fonction Q : $S = \frac{\partial Q}{\partial x}$, et $\phi(x)$ désigne une fonction quelconque intégrable.

2. Si on suppose que $\phi(x)$ tend vers zéro pour des grandes valeurs de $|x|$, la fonction $u(x,t)$ vérifie-t-elle l'identité suivante : $u(x,0) = \phi(x)$? Démontrer et interpréter.

T4 : Méthodes de sous-espaces (4 Points)

L'itération du gradient conjugué pour le système linéaire $Ax = b$ s'écrit comme suit :

$x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r_0$
for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**

$\alpha_n = \dfrac{r_{n-1}^T r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}}$ longueur du pas

$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}$ solution approchée

$r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1}$ résidu

$\beta_n = \dfrac{r_n^T r_n}{r_{n-1}^T r_{n-1}}$

$p_n = r_n + \beta_n p_{n-1}$ direction de recherche

end

On vous demande de montrer que la solution approchée x_n à l'itération n appartient à l'espace engendré par les résidus $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$.

T5 : SVD (4 Points)

Soit la relation $b = Ax$, avec A une matrice quelconque, et b et x des vecteurs. Montrez que la SVD permet de diagonaliser toute matrice A pour autant qu'on exprime b et x dans la base des vecteurs singuliers de A, respectivement à gauche et à droite.