Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen d'exercices

20 Août 2022

Seules les réponses rédigées dans les **cadres** seront prises en considération.

Remarques :

— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
— ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
— *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdits.*
— *L'examen dure* ***1h30****.*

Exercices

E1 : Caractéristiques (10 Points)

On considère l'équation générale aux dérivées partielles suivante

$$u_t + A(t+5)u_x = B,$$

définie pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, avec A et B des fonctions quelconques, et assortie de la condition initiale $u(x,0) = 2x$.
Considérer les configurations suivantes :

(a) (4 Points) Poser $A = x$, et $B = 0$.

(b) (2 Points) En partant du point (a) et en justifiant chaque étape de calcul, quelle serait la nouvelle solution si $B = 1$? Les lignes caractéristiques seraient-elles modifiées ?

(c) (4 Points) Poser $A = u$, et $B = 0$.

Pour les cas (a) et (c),
- classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
- déterminer la solution et l'équation des lignes caractéristiques,
- esquisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -1, 0, 1$.

Solution

(a) L'équation à résoudre devient

$$u_t + x(t+5)\ u_x = 0. \tag{1}$$

EDP linéaire homogène d'ordre 1.
A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = 0, \tag{3}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t),t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = x\ (t+5), \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = \pm\, C_2\ \exp(t^2/2)\exp(5t), \quad C_2 \in \mathbb{R}_0^+. \tag{6}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \tag{7}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = \pm\, C_2, \tag{8}$$

et la constante C_2

$$C_2 = \pm\, x_0. \tag{9}$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = x_0\ \exp(t^2/2)\exp(5t). \tag{10}$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = \phi(x_0) = 2x_0, \tag{11}$$
$$= 2x\ \exp(-t^2/2)\exp(-5t). \tag{12}$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(10) peut être utilisée pour différents x_0.

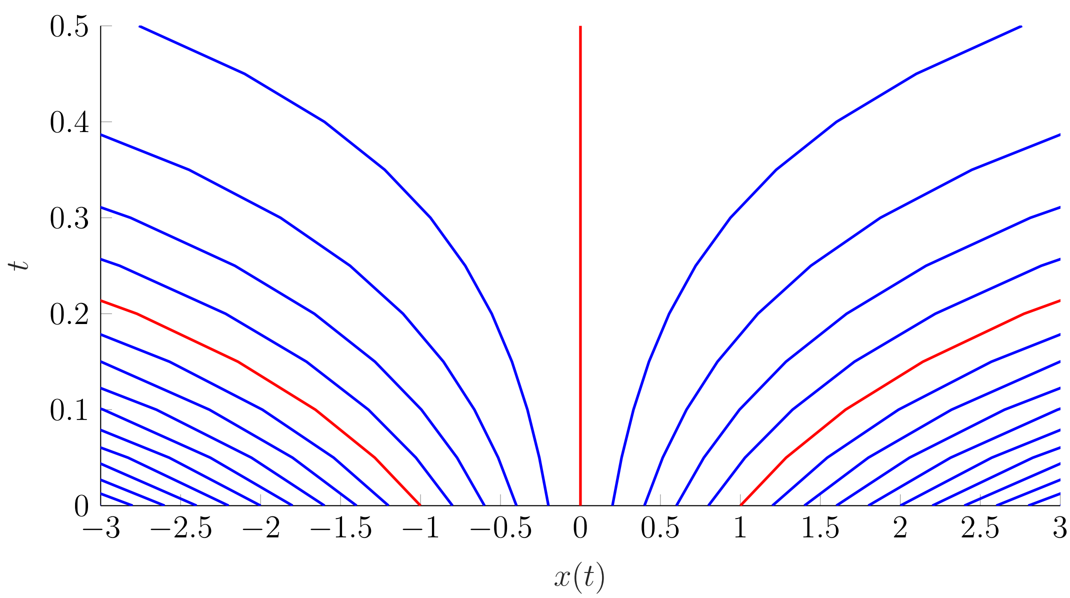

FIGURE 1 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.

(b) L'équation à résoudre devient

$$u_t + x(t+5)\ u_x = 1. \tag{13}$$

EDP linéaire non-homogène d'ordre 1.

L'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 1, \tag{14}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dans ce cas-ci, la solution n'est plus constante le long de ces lignes.

$$u(x(t), t) = t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \tag{16}$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = \phi(x_0) = t + 2x_0, \tag{17}$$
$$= t + 2x \ \exp(-t^2/2)\exp(-5t). \tag{18}$$

Les lignes caractéristiques restent identiques.

(c) L'équation à résoudre devient

$$u_t + u(t+5)\ u_x = 0. \tag{19}$$

EDP non-linéaire et homogène d'ordre 1.
A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\ \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{20}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0, \tag{21}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t), t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), t)(t+5), \tag{23}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = C_1(t+5), \tag{24}$$
$$\Rightarrow \qquad x(t) = C_1\ \left(\frac{t^2}{2} + 5t + C_2\right), \quad C_2 \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0) = 2x_0. \tag{26}$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = 2x_0\ \left(\frac{t^2}{2} + 5t + C_2\right). \tag{27}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = C_1\, C_2, \tag{28}$$
$$\Rightarrow \qquad C_2 = 1/2. \tag{29}$$

les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = x_0\, (t^2 + 10t + 1), \tag{30}$$
$$\Rightarrow \qquad x_0 = \frac{x}{t^2 + 10t + 1}. \tag{31}$$

Finalement, la solution est

$$u(x,t) = \frac{2x}{t^2 + 10t + 1}. \tag{32}$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(30) peut être utilisée pour différents x_0.

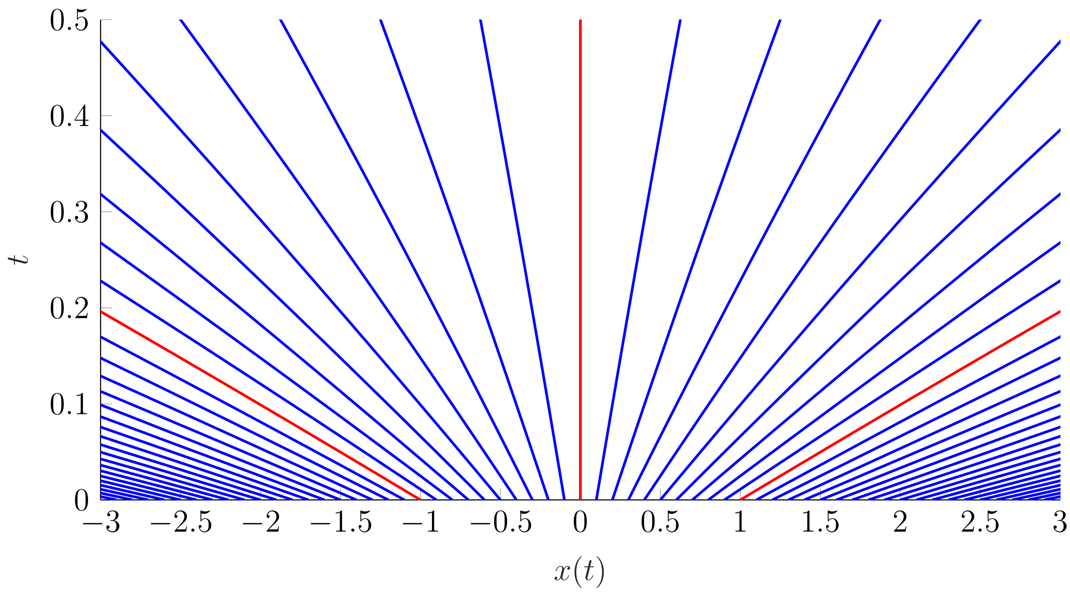

FIGURE 2 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.

E2 : Séparation de variables (10 Points)

En mécanique quantique, l'état d'une particule est décrit par une fonction d'onde ψ. Cette fonction d'onde est à valeur complexe et est une fonction de la position et du temps, $\psi = \psi(\boldsymbol{x}, t)$. L'évolution de l'état ψ d'une particule de masse m_0 dans un puits de potentiel infini de domaine D satisfait le problème différentiel suivant

$$\begin{aligned} i\hbar\, \psi_t(\boldsymbol{x}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi(\boldsymbol{x}, t), && \boldsymbol{x} \in D, t \in]0, +\infty[, && (\diamond)\\ \psi(\boldsymbol{x}, t) &= 0, && \boldsymbol{x} \in \partial D, t \in]0, +\infty[, \\ \psi(\boldsymbol{x}, 0) &= \Phi(\boldsymbol{x}), && \boldsymbol{x} \in D, \end{aligned}$$

avec $\hbar$ une constante réelle strictement positive (constante de Planck réduite), $i^2 = -1$, Δ l'opérateur Laplacien, ∂D la frontière de D et $\Phi(\boldsymbol{x})$ une condition initiale.

On considère un espace à deux dimensions spatiales décrites par les coordonnées cartésiennes x et y. On fixe également le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$, avec a et b deux constantes réelles strictement positives. Le Laplacien s'exprime comme $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Dans ce cadre :

(a) (1 Point) Utiliser la séparation de variables $\psi(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ pour obtenir les équations séparées suivantes, en justifiant,

$$i\hbar T' = ET, \qquad (\dagger)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\phi = E\phi, \qquad (\ddagger)$$

avec E une constante de séparation, que l'on supposera **réelle** et positive ($E \in \mathbb{R}^+$).

(b) (1 Point) Résoudre l'équation différentielle ordinaire ($\dagger$) pour $T(t)$.

(c) (2 Points) Utiliser la séparation de variables $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ dans l'équation ($\ddagger$) pour obtenir deux équations différentielles ordinaires. On peut supposer les nouvelles constantes de séparation **réelles**. Exprimer les conditions aux limites associées à ces deux équations. Justifier.

(d) (4 Points) Résoudre les deux problèmes différentiels obtenus.

(e) (2 Points) En partant des solutions séparables, montrer que la solution la plus générale du problème aux conditions aux limites prend la forme suivante

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp\left(-\frac{iE_{n,m}t}{\hbar}\right),$$

avec $E_{n,m} = E(n, m)$ une expression à déterminer, et les $A_{n,m}$ des constantes complexes. Justifier.

Solution :

(a) Introducing the separation of variables $\psi(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ in equation ($\diamond$) yields

$$i\hbar\, \phi T' = -\frac{\hbar^2}{2m_0} T \Delta\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{i\hbar\, T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta\phi}{\phi}. \tag{33}$$

The two sides of the last equation depend on different variables. They must therefore be constant. Let us denote this constant E, with $E \in \mathbb{R}^+$. The separated equations write

$$i\hbar T' = ET, \tag{†}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta\phi = E\phi. \tag{‡}$$

(b) Equation (†) can be directly solved by inspection. It gives $T(t) = A \exp\left(-iE\, t/\hbar\right)$, with $A \in \mathbb{C}$ an integration constant.

(c) Using the separation of variables $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ in equation (‡) leads to

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}(X''Y + XY'') = EXY \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{X''}{X} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{Y''}{Y} + E. \tag{34}$$

The two sides of the last equation depend on different variables and must therefore be constant. Let us denote this constant E_x. Let us also introduce $E_y = E - E_x$. We have $E_x, E_y \in \mathbb{R}$. The separated equations write

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} X'' - E_x X = 0, \tag{35}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} Y'' - E_y Y = 0. \tag{36}$$

The boundary conditions lead immediately to

$$X(0) = X(a) = 0, \qquad \text{and} \qquad Y(0) = Y(b) = 0. \tag{37}$$

(d) The two problems are equivalent, let us focus on the problem for X first. Three cases are considered.

— If $E_x = 0$, the general solution of the equation is $X(x) = Bx + C$, with $B, C \in \mathbb{C}$. The only possibility to match the boundary condition is to have $B = C = 0$, which does not lead to an interesting solution.

— If $2m_0 E_x/\hbar^2 = -\omega_x^2 < 0$, with $\omega_x \in \mathbb{R}_0^+$, the general solution is

$$X(x) = D \sinh(\omega_x x) + F \cosh(-\omega_x x), \tag{38}$$

with $D, F \in \mathbb{C}$. The only possibility to match the boundary condition is to have $D = F = 0$, which does not lead to an interesting solution.

— If $2m_0 E_x/\hbar^2 = k_x^2 > 0$, with $k_x \in \mathbb{R}_0^+$, the general solution is

$$X(x) = G \sin(k_x x) + H \cos(k_x x), \tag{39}$$

with $G, H \in \mathbb{C}$. The boundary condition $X(0) = 0$ implies $H = 0$, whereas the condition $X(a) = 0$ requires that $k_x a = n\pi$, with $n \in \mathbb{N}_0$ (the case $n = 0$ is rejected because it leads to $k_x = 0$ which is not under consideration). Therefore, for every $n \in \mathbb{N}_0$, the function

$$X(x) = G \sin(n\pi x/a), \quad \text{with} \quad E_x = \frac{k_x^2 \hbar^2}{2m_0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} \tag{40}$$

is a solution to the separated problem for X.

Similarly, if we introduce $2m_0 E_y/\hbar^2 = k_y^2$, with $k_y \in \mathbb{R}_0^+$, for every $m \in \mathbb{N}_0$, the function

$$Y(y) = J \sin(m\pi y/b), \quad \text{with} \quad E_y = \frac{k_y^2 \hbar^2}{2m_0} = \frac{m^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 b^2} \tag{41}$$

is a solution to the separated problem for Y.

(e) Every product $\psi = XYT$ is a separable solution to the boundary value problem. The problem is linear so every linear combination of solutions is also a solution. Consequently, the most general solution to the initial problem in a two dimensional rectangular potential well writes

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b) \exp\left(-\frac{iE_{n,m}t}{\hbar}\right), \tag{42}$$

with

$$E_{n,m} = E_x + E_y = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} + \frac{m^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 b^2}, \tag{43}$$

and with $A_{n,m}$ complex coefficients to determine with the initial condition.