Septembre 2020 - Examen de théorie

On vous demande de fournir vos réponses sur feuilles séparées, que vous devrez scanner et téléverser sur la plateforme eCampus avant la fin de l'épreuve. N'oubliez pas d'indiquer vos nom et prénom sur vos feuilles de réponses.

Vos réponses doivent être ***rigoureuses, concises et spécifiques****. Il ne s'agit pas d'être verbeux, mais bien de prouver, par des réponses courtes et précises, qui vont droit au but, que vous avez compris la matière. Des réponses qui contiennent des informations périphériques par rapport à ce qui est demandé seront moins bien évaluées que des réponses parfaitement en phase avec l'objet de la question.*

Vous êtes priés de rédiger vos réponses ***avec soin****. Sur les feuilles de réponses, votre écriture doit être* ***parfaitement lisible*** *et la* ***mise en page structurée et aérée****, sinon vous serez pénalisés.*

---

1. Définitions

Définir :

a. une fonction harmonique,

b. l'ordre d'une équation aux dérivées partielles,

c. une condition limite homogène,

d. un sous-espace de Krylov,

e. une approximation de rang faible.

2. Equations aux dérivées partielles

On vous demande de donner un exemple personnel :

a. d'une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire et homogène,

b. d'une équation linéaire de transport à coefficients variables,

c. d'une équation de Poisson,

d. d'une équation d'onde non homogène,

e. d'une EDP du second ordre parabolique.

Veuillez définir précisément chaque notation que vous utilisez (ex. coefficient numérique constant, fonction inconnue, variable indépendante, …).

3. Précision des mesures

En ingénierie, il est impossible de mesurer avec une précision parfaite les conditions initiales et conditions limites nécessaires pour alimenter en données une modélisation basée sur des équations aux dérivées partielles (EDPs). Partant de ce constat, quelle propriété est généralement requise pour la formulation de problèmes basés sur des EDPs ? Expliquer.

4. Problème de diffusion

On considère deux fonctions u et v, qui sont toutes deux solutions d'un même problème de diffusion avec les mêmes conditions limites de Dirichlet. En appliquant le principe du maximum à la fonction $u - v$, quelle propriété importante est-il possible de prouver ? Expliciter le raisonnement.

5. Equation de Laplace

Dans un domaine D quelconque et pour une fonction g donnée, la solution de ce problème :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur la frontière de } D$$

existe-t-elle toujours ? Le cas échéant, est-elle unique ?

6. Fonctions harmoniques

On considère une fonction harmonique u dans un disque D de rayon a. Sur le cercle de rayon a, on impose la condition limite suivante : $u = 1 + 3 \sin 2\theta$. Sans effectuer aucun calcul,

a. donner la valeur maximale de u sur l'union du disque D et du cercle de rayon a ;

b. donner la valeur de u à l'origine.

7. Caractéristiques

On considère l'équation aux dérivée partielles $u_t + u\, u_x = 0$. Pour chacune des propositions ci-dessous, indiquer si elle est correcte ou pas et justifier brièvement.

a. Les caractéristiques sont des droites.

b. La solution est constante sur chacune des droites caractéristiques.

c. Une caractéristique unique passe en chaque point du plan (x, t).

8. Approximation d'une matrice

On considère une matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, avec $n \leq m$.

a. On vous demande d'écrire une approximation A_k de cette matrice, sous la forme d'une somme de k matrices de rang 1, avec $k \leq n$. Cette approximation doit vérifier la propriété suivante :

$$\left\|A - A_k\right\|_2 = \min_{\operatorname{rank}(B)=k} \left\|A - B\right\|_2 .$$

Définir très précisément toutes les notations que vous utilisez dans votre réponse. S'il s'agit de matrices ou de vecteurs, précisez systématiquement leurs dimensions (nombre de lignes et de colonnes).

b. Calculer la valeur de $\left\|A - A_k\right\|_2$.

9. Approximation des solutions des équations aux dérivées partielles

Une approximation par différences finies (différence avant pour la dérivée temporelle, différence arrière pour la dérivée spatiale) de l'équation du 1[er] ordre $u_t + a\, u_x = 0$ $(a > 0)$ mène au schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - s\,(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

avec $u_j^n \approx u\,(j\Delta x,\, n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel.

- Donner la signification de la notation s dans le schéma numérique ci-dessus.
- Quel est l'ordre de précision de ce schéma numérique ? Le schéma est-il *explicite* ou *implicite* ?

10. Gradient conjugué

Démontrer que les différents itérés de l'itération du gradient conjugué appartiennent à un sous-espace de Krylov.