Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen d'exercices

17 Janvier 2023

Seules les réponses rédigées dans les **cadres** seront prises en considération.

Remarques :

- *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
- *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
- ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
- *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdits.*
- *L'examen dure* ***2h****.*

Exercices

E1 : Caractéristiques (8 Points)

Considérer l'équation

$$u_t + au_x + u = 0,$$

définie pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, avec a un coefficient réel constant, et assortie d'une sigmoïde en condition initiale de la forme

$$u(x,0) = \frac{1}{1+\exp(-x)}.$$

En utilisant la méthode des caractéristiques

(a) (1 Point) classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),

(b) (2 Points) transformer l'équation aux dérivées partielles en deux équations différentielles ordinaires,

(c) (3 Points) calculer l'équation des caractéristiques et la solution de ce problème,

(d) (1 Point) déterminer pour quelle valeur de a la solution du problème devient

$$u(x,t) = \frac{1}{\exp(t) + \exp(-x)}, \tag{1}$$

(e) (1 Point) en partant du point précédent, esquisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -1, 0, 1$.

Solution :

(a) EDP linéaire, homogène, d'ordre 1.

(b) A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente en deux équations différentielles ordinaires. La première est donnée par l'expression ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = -u, \tag{3}$$

en considérant les dérivées partielles u_x et u_y définies sur les lignes $y(x)$.
Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = a. \tag{4}$$

(c) Dès lors, la solution devient

$$
\begin{aligned}
&& \frac{du}{dt} &= u, && (5)\\
&\Rightarrow & \ln|u| &= -t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, && (6)\\
&\Rightarrow & |u| &= K\exp(-t), \quad K \in \mathbb{R}_0^+, && (7)\\
&\Rightarrow & u(x(t),t) &= \pm K\exp(-t), && (8)\\
&\Rightarrow & u(x(t),t) &= K_1\exp(-t), \quad K_1 \in \mathbb{R}_0. && (9)
\end{aligned}
$$

En résolvant l'Éq.(4), les lignes caractéristiques sont données par l'équation

$$
\begin{aligned}
&& \frac{dx}{dt} &= a, && (10)\\
&\Rightarrow & x(t) &= at + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R} && (11)\\
&&&&& (12)
\end{aligned}
$$

La constante C_2 est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $x = 0$,

$$
\begin{aligned}
&& x(0) = x_0 &= C_2, && (13)\\
&\Rightarrow & C_2 &= x_0 && (14)
\end{aligned}
$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$
\begin{aligned}
&& x(t) &= at + x_0, && (15)\\
&\Rightarrow & x_0 &= x - at, && (16)\\
&&&&& (17)
\end{aligned}
$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la constante K_1

$$
\begin{aligned}
&& u(x(0),0) = K_1\exp(0) &= \frac{1}{1+\exp(-x_0)}, && (18)\\
&\Rightarrow & K_1 &= \frac{1}{1+\exp(-x_0)}. && (19)
\end{aligned}
$$

Finalement, la solution est

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{\exp(-t)}{1+\exp[-(x-at)]}. && (20)\\
&= \frac{1}{\exp(t)+\exp[(a+1)t-x]}. && (21)
\end{aligned}
$$

(d) Pour obtenir la solution demandée

$$u(x,t) = \frac{1}{\exp(t) + \exp(-x)}, \tag{22}$$

à partir de l'Éq.(21), la valeur du paramètre à imposer est $a = -1$.

(e) Les lignes caractéristiques sont représentées sur la Fig.(1).

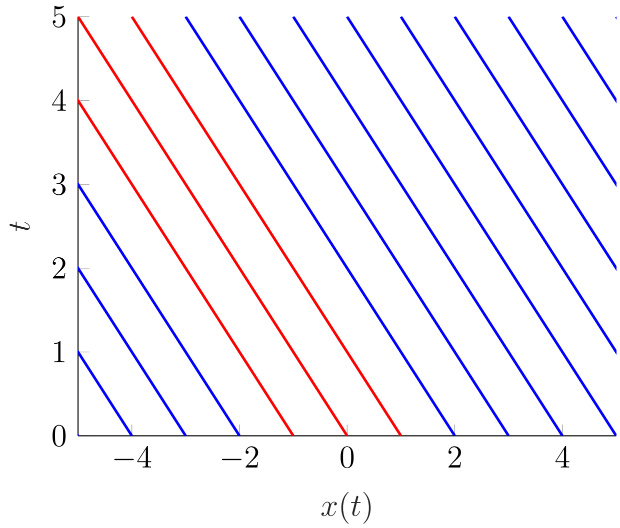

FIGURE 1 – Les lignes caractéristiques demandées sont dessinées en rouge, les autres en bleu.

E2 : Séparation de variables et analyse de Von Neumann (17 Points)

Considérer la diffusion 1D d'un élément radioactif en solution dans un liquide statique. Dans un récipient de longueur L, la concentration u de cet élément suit l'équation (†)

$$u_t = \alpha u_{xx} - \lambda u, \tag{†}$$

où $\alpha > 0$ est la diffusivité de l'élément dans le fluide, $\lambda > 0$ est la constante de désintégration de l'élément et $x \in]0, L[$. Le récipient étant hermétique, on impose des conditions de Neumann homogènes, le flux de matière αu_x sera donc nul en 0 et en L.
On impose sur le domaine la condition initiale suivante

$$u(x, 0) = \phi(x). \tag{‡}$$

1. Pour étudier les propriétés analytiques du problème, appliquer la procédure ci-dessous.

   (a) (1 Point) On note $M(t)$ la quantité totale de matière présente dans le domaine :

   $$M(t) = \int_0^L u(x, t)\, \mathrm{d}x.$$

   Montrer que l'équation (†) et les conditions limites impliquent que $\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}$ peut s'exprimer en fonction de $M(t)$. En déduire la valeur de $M(t)$ pour tout $t > 0$ si on a la condition initiale (‡).

   (b) (7 Points) En utilisant la séparation $u(x, t) = X(x)T(t)$, trouver toutes les solutions séparables de (†) compatibles avec les conditions limites énoncées précédemment.
   Montrer, en justifiant votre démarche, que la solution générale de (†) avec les conditions limites peut s'écrire sous la forme

   $$u(x, t) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} A_n \cos(k_n x) e^{-\omega_n t}.$$

   Donner la valeur de n_0 ainsi que, pour tout n, de k_n et ω_n, en fonction de α, λ et L.

   Sans faire de calculs, expliquer si les coefficients A_n peuvent être déterminés à partir de la condition initiale $\phi(x)$.
   Indice : Résoudre la partie spatiale en premier devrait mener à une résolution plus simple.

   (c) (1 Point) Peut-on déterminer un ou plusieurs des coefficients A_n si seule la masse initiale $M(0)$ est connue ? Justifier.

2. Pour résoudre l'équation numériquement par différences finies, une discrétisation hybride implicite-explicite est utilisée : la diffusion est simulée de façon explicite, mais le terme de décroissance radioactive est évalué au temps suivant. Pour un pas spatial Δx et un pas de temps Δt, le schéma peut s'écrire sous la forme

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right)}{\Delta x^2} - \lambda u_j^{n+1}.$$

   (a) (1 Point) Donner une expression explicite de u_j^{n+1} à partir des valeurs de la n-ième étape.

   (b) (5 Points) En notant $s = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ et $r = \lambda \Delta t$, établissez un critère de stabilité via une analyse de Von Neumann. Exprimez le sous la forme d'une condition sur s pour r fixé.

   (c) (1 Point) Toutes choses étant égales par ailleurs, quel est l'impact d'une augmentation de λ sur la valeur maximale de Δt conduisant à un schéma stable ?

   (d) (1 Point) Pour des paramètres physiques α, λ donnés, montrer que si Δx est suffisamment élevé, le schéma est stable pour tout Δt. Trouver cette valeur minimale de Δx.

Solution :

1. (a) En admettant qu'on peut permuter la dérivée temporelle et l'intégration spatiale, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= \int_0^L u_t(x,t)\,\mathrm{d}x && (23)\\
&= \alpha \int_0^L u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x && (24)\\
&= \alpha\left(u_x(L,t) - u_x(0,t)\right) - \lambda M(t) && (25)\\
&= -\lambda M(t). && (26)
\end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle est $Ce^{-\lambda t}$. La constante C est égale à $M(0)$, qu'on peut calculer à partir de la condition initiale. Au final, il vient

$$M(t) = e^{-\lambda t} \int_0^L \phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

   (b) En introduisant l'ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ dans l'équation, il vient

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t) - \lambda X(x)T(t). \tag{28}$$

En divisant par u, on obtient

$$\frac{T'}{T} = \alpha \frac{X''}{X} - \lambda. \tag{29}$$

L'expression de gauche ne dépend que du temps, et celle de droite que de x. Ces expressions sont donc constantes. On note C la constante $\frac{X''}{X}$, et la constante relative au temps est alors $\alpha C - \lambda$.

Discussion selon C

— Si $C > 0$, la fonction spatiale est une combinaison de fonctions hyperboliques : $X(x) = A \sinh \sqrt{C}x + B \cosh \sqrt{C}x$. On a $X'(0) = \sqrt{C}(A \cosh 0 + B \sinh 0 = 0$ qui implique $A = 0$ (vu $\sinh 0 = 0$). La condition $X'(L) = B\sqrt{C} \sinh \sqrt{C}L$ ne peut être respectée que si B est également nul. Il n'y a donc pas de solution non-null pour $C > 0$.

— Si $C = 0$, la fonction spatiale est linéaire. Les conditions limites imposent une pente nulle. Toute fonction constante est donc une solution valide. La fonction temporelle correspondante est alors $u_0(x, t) = e^{-\lambda t}$.

— Si $C = -k^2 < 0$, la solution spatiale est trigonométrique : $X(x) = A \cos kx + B \sin kx$. La dérivée nulle en 0 impose $B = 0$, et dans ce cas, $X'(L) = -kA \sin kL = 0$ implique $k = n\frac{\pi}{L}$. Pour tout naturel positif n, il existe donc une solution $u_n(x, t) = \cos(k_n x)e^{-(\alpha k_n^2+\lambda)t}$ où $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

En exploitant la linéarité de l'équation, on peut construire un ensemble de solutions via des combinaisons linéaires des solutions séparables. En notant que $\cos 0 = 1$, on peut écrire de façon compacte cette combinaison :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi \frac{x}{L}) e^{-\left(\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \lambda\right)t}. \tag{30}$$

On arrive donc à la forme demandée en prenant $n_0 = 0$, $k_n = \frac{n\pi}{L}$ et $\omega_n = \alpha k_n^2 + \lambda$. Au temps initial, les exponentielles valent 1, et les coefficients peuvent être déduits d'une série de Fourier.

(c) En exprimant la masse à partir de la solution séparée, on obtient $M(0) = A_0 \int_0^L \cos 0 \, \mathrm{d}x = A_0 L$, car tous les cosinus sont d'intégrale nulle. Le coefficient A_0 est donc $\frac{M(0)}{L}$.

2. (a) En isolant u_j^{n+1}, on parvient à

$$u_j^{n+1}(1 + \lambda\Delta t) = u_j^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right). \tag{31}$$

(b) On introduit un mode d'erreur $\epsilon_k = \hat{\epsilon}(k, t) \exp ikx$ dans l'équation discrète, pour obtenir

$$\hat{\epsilon}_{n+1}(1 + \lambda\Delta t) = \hat{\epsilon}_n \left(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}(2\cos k\Delta x - 2)\right). \tag{32}$$

Le critère de stabilité de Von Neumann nécessite que

$$\left|\frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n}\right| \leq 1. \tag{33}$$

Il vient successivement, en introduisant les parmaètres adimensionnels s et r :

$$\frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} = \frac{\left(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}(2\cos k\Delta x - 2)\right)}{1 + \lambda\Delta t} \tag{34}$$

$$= \frac{(1 + s(2\cos k\Delta x - 2))}{1 + r} \tag{35}$$

$$= \frac{\left(1 - 4s \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}\right)}{1 + r}. \tag{36}$$

Cette expression est réelle, et la condition de stabilité nécessite de vérifier qu'elle est inférieure à 1 et supérieure à -1. Le facteur d'amplification est toujours plus petit que 1 (vu la positivité de $s, r, \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$). Il reste donc à vérifier qu'il est supérieur à -1 :

$$\frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} \geq -1 \tag{37}$$

$$\iff 1 - 4s\sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \geq -1 - r \tag{38}$$

$$\iff 4s\sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 2 + r \tag{39}$$

$$\iff s\sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{4} \tag{40}$$

Un sinus au carré étant toujours entre 0 et 1, l'inégalité est vérifiée pour tout k si

$$s \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{4}, \tag{41}$$

qui est la condition de stabilité.

(c) Il est possible de reformuler la condition de stabilité en repartant des définitions de s et r pour arriver à

$$\Delta t \left(\frac{\alpha}{\Delta x^2} - \frac{\lambda}{4} \right) \leq \frac{1}{2}, \tag{42}$$

qui indique clairement qu'une diminution de λ augmente la valeur maximale de Δt, pour autant que l'expression entre parenthèses soit positive. Si cette dernière est négative, le critère est toujours respecté quelque soit λ.

(d) En faisant tendre Δx vers l'infini dans l'équation (42), on obtient la relation suivante :

$$0 \leq \frac{1}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{4}, \tag{43}$$

qui est toujours vérifiée.
De plus, l'équation (42) ne peut être vérifiée pour tout Δt positif que si $\frac{\alpha}{\Delta x^2} - \frac{\lambda}{4}$ est négatif, c'est-à-dire si

$$\Delta x^2 \geq \frac{4\alpha}{\lambda}. \tag{44}$$