Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen de théorie

18 Janvier 2022

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération. Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Remarques :

— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
— *Fournissez des réponses* ***concises et spécifiques****. On vous demande de prouver que vous avez atteint un niveau élevé de compréhension de la matière. Des réponses qui contiennent des informations périphériques par rapport à ce qui est demandé seront moins bien évaluées que des réponses en parfaite adéquation avec l'objet de la question.*
— *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*

Théorie

T1 : Définitions (4 Points)

Définir les concepts suivants :

— une courbe caractéristique d'une équation aux dérivées partielles ;

— une solution faible d'une équation aux dérivées partielles ;

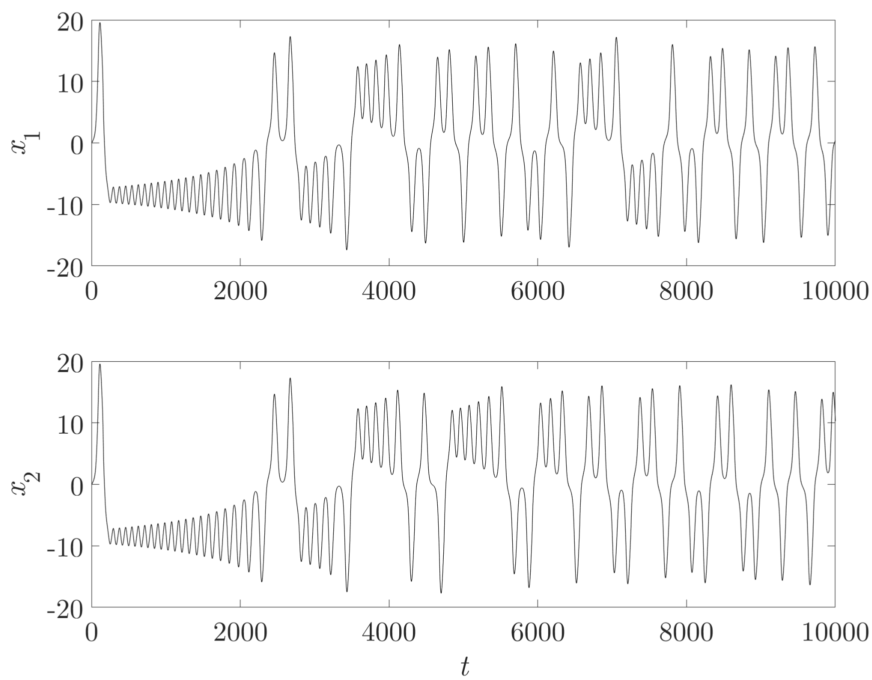
— le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^n(A, b)$ pour une matrice A de taille $m \times m$ et un vecteur b de taille m ;

— les vecteurs singuliers à droite d'une matrice A de taille $m \times n$.

T2 : Problèmes bien posés (4 Points)

1. Énoncer les conditions pour qu'un problème soit bien posé.

2. On considère deux variantes d'un même problème. La seule différence entre les deux variantes est une très légère modification de la condition initiale. Le graphique ci-dessous représente l'évolution au cours du temps (t) de la solution de chacune de ces deux variantes du problème (notées x_1 et x_2). S'agit-il d'un problème bien posé ? Justifier en une ligne.



T3 : Équations quasi-linéaires (3 Points)

Soit l'équation :

$$u_x u_{xx} + u_y^3 u_{xy} + (\tan u)\, u_{yy} = f\,(u, u_x, u_y)\,,$$

où f désigne une fonction connue.

1. Quelle est l'ordre de cette équation ?

2. Est-il possible de reformuler cette équation sous la forme d'un système d'équations d'un ordre inférieur ? Si oui, écrire ce système. Si non, justifier.

T4 : Schémas explicites et implicites (4 Points)

1. Définir ce qu'on appelle un schéma de discrétisation explicite et un schéma implicite.

2. Citer un avantage de certains schémas implicites par rapport aux schémas explicites, puis citer un avantage des schémas explicites par rapport aux schémas implicites. Expliquer.

3. L'équation d'onde et l'équation de diffusion peuvent toutes deux être approximées à l'aide d'un schéma de discrétisation explicite dans le temps. Pour les deux équations, la stabilité de tels schémas se traduit par une contrainte sur le pas de temps. Néanmoins, on dit que la condition de stabilité est « plus contraignante » pour l'équation de diffusion que pour l'équation d'onde. Expliquer.

4. Pour quelle équation (onde ou diffusion) un schéma implicite sera-t-il plus souvent privilégié ? Justifier.

T5 : Green (4 Points)

Écrire une solution de l'équation de diffusion sous la forme d'une fonction dépendant d'une variable unique $x/\sqrt{t}$. Expliquer pourquoi une telle fonction est un « bon candidat ». Donner l'expression de la solution.

T6 : Laplace (3 Points)

Discuter l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Laplace sur un domaine bidimensionnel Ω de frontière $\Gamma = \Gamma_A \cup \Gamma_B$ ($\Gamma_A \neq \emptyset$ et $\Gamma_B \neq \emptyset$), dans les trois cas suivants :

— Condition aux limites de Dirichlet sur $\Gamma_A \cup \Gamma_B$
— Condition aux limites de Neumann sur $\Gamma_A \cup \Gamma_B$
— Condition aux limites de Dirichlet sur Γ_A et condition de Neumann sur Γ_B

Intepréter physiquement chaque cas.

T7 : Approximation d'une matrice (4 Points)

On considère une matrice $A \in R^{m \times n}$ de rang r. On vous demande

— d'écrire la meilleure approximation A_k de rang $k \leq r$ de cette matrice, telle que $||A - A_k||_2 = \min_{\text{rang}(B)=k} ||A - B||$;

— de donner la valeur de $||A - A_k||_2$.

Définir très précisément toutes les notations que vous utilisez dans votre réponse. S'il s'agit de matrices ou de vecteurs, précisez systématiquement leurs dimensions.