Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen

06 Janvier 2021

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération. Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Remarques :

- *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
- *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
- ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
- *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*

E1 : Séparation de variables (10 Points)

Considérer l'équation de Klein-Gordon unidimensionnelle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \frac{1}{\tau^2} u = 0 \qquad (\diamond)$$

où c et τ sont des constantes strictement positives.

(a) (2 Points) Classifier l'Éq.($\diamond$) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? parabolique ? elliptique ? hyperbolique ? Quel est l'ordre de cette équation ?

(b) (3 Points) Montrer que l'énergie $e \triangleq \frac{1}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x^2 + \frac{1}{\tau^2} u^2\right]$ est une densité conservée et donner le flux associé. Le coefficient τ engendre-t-il une dissipation d'énergie ? Justifier.

(c) (4 Points) Considérer maintenant le domaine $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty[$ et les conditions de bord $u(0,t) = 0, \forall t > 0$ et $u(l,t) = 0, \forall t > 0$. Montrer, en justifiant votre démarche, que la solution générale de l'Éq.($\diamond$) sur ce domaine avec ces conditions de bord peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\omega_n t\right) + B_n \sin\left(\omega_n t\right)\right] \sin\left(k_n x\right).$$

Donner l'expression de ω_n et k_n en fonction de n, c, τ et l.

(d) (1 Point) La vitesse du n-ième mode est définie par $c_n \triangleq \frac{\omega_n}{k_n}$. Donner l'expression de ces vitesses. En comparant avec l'équation d'ondes classique ($\tau \to \infty$), quelle est l'influence du coefficient τ ?

Solution :

(a) L'opérateur différentiel associé à cette équation est $\mathcal{L} \triangleq \partial_{tt} - c^2\partial_{xx} + \frac{1}{\tau^2}$. L'équation est donc
  - homogène ($\mathcal{L}(u) = 0$),
  - linéaire ($\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$),
  - du second ordre spatial (∂_{xx}) et temporel (∂_{tt}),
  - hyperbolique.

  En effet, elle peut s'écrire

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + F\ u = G \tag{1}$$

$$1u_{tt} + 0\ u_{tx} - c^2u_{xx} + 0\ u_t + 0\ u_x + \frac{1}{\tau^2}u = 0 \tag{2}$$

  en conséquence

$$B^2 - 4AC = 4c^2 > 0. \tag{3}$$

(b) La dérivée temporelle de e donne successivement

$$\partial_t e = \partial_t \left[\frac{1}{2}\left(u_t^2 + c^2u_x^2 + \frac{1}{\tau^2}u^2\right)\right] \tag{4}$$

$$= u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} + \frac{1}{\tau^2}uu_t \tag{5}$$

$$= u_t(c^2u_{xx} - \frac{1}{\tau^2}u) + c^2u_xu_{xt} + \frac{1}{\tau^2}uu_t \tag{6}$$

$$= c^2u_tu_{xx} + c^2u_xu_{xt} \tag{7}$$

$$= c^2\partial_x\left(u_xu_t\right) \tag{8}$$

  La loi de conservation peut donc s'écrire

$$e_t + f_x = 0 \tag{9}$$

  avec $f = -c^2u_xu_t$ le flux associé.
  Le terme $\frac{1}{\tau^2}u^2$ présent dans l'énergie peut aussi bien diminuer qu'augmenter au fil du temps. Lorsque l'énergie e est constante, il y a donc un échange d'énergie entre les trois termes de sorte que l'énergie classique $e_\infty \triangleq \frac{1}{2}\left[u_t^2 + c^2u_x^2\right]$ ne tend pas nécessairement vers 0 quand $t \to \infty$. Le nouveau terme n'entraîne donc pas de dissipation.

(c) En utilisant la décomposition $u = wv$, l'équation s'écrit

$$w''v \ - c^2wv'' \ + \frac{1}{\tau^2}wv = 0 \tag{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau^2w''}{w} - \frac{c^2\tau^2v''}{v} = -1. \tag{11}$$

  Le premier terme ne dépend que du temps t alors que le deuxième terme ne dépend que de la variable spatiale x. Chacun de ces deux termes doit donc être égal à une constante dont la somme vaut l'unité, *i.e*

$$\tau^2w'' - \lambda_t w = 0, \quad c^2\tau^2v'' - \lambda_x v = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_x - \lambda_t = 1. \tag{12}$$

Dépendance spatiale En fonction du signe de λ_x, trois types de solutions apparaissent, *i.e*

$$\begin{aligned}
&\text{si } \lambda_x = 0 && \Rightarrow v = Ax + B, && (13)\\
&\text{si } \lambda_x = \omega_x^2 > 0 && \Rightarrow v = C\cosh(\omega_x \frac{x}{c\tau}) + D\sinh(\omega_x \frac{x}{c\tau}), && (14)\\
&\text{si } \lambda_x = -\omega_x^2 < 0 && \Rightarrow v = E\cos(\omega_x \frac{x}{c\tau}) + F\sin(\omega_x \frac{x}{c\tau}). && (15)
\end{aligned}$$

Dépendance temporelle En fonction du signe de λ_t, trois types de solutions apparaissent, *i.e*

$$\begin{aligned}
&\text{si } \lambda_t = 0 && \Rightarrow w = Gt + H, && (16)\\
&\text{si } \lambda_t = \omega_t^2 > 0 && \Rightarrow w = I\cosh(\omega_t \frac{t}{\tau}) + J\sinh(\omega_t \frac{t}{\tau}), && (17)\\
&\text{si } \lambda_t = -\omega_t^2 < 0 && \Rightarrow w = K\cos(\omega_t \frac{t}{\tau}) + L\sin(\omega_t \frac{t}{\tau}). && (18)
\end{aligned}$$

Les conditions de bord donnent des conditions à appliquer sur la partie spatiale, *i.e.*

$$\begin{cases} u(0,t) & = w(t)v(0) \quad = 0,\ \forall t \Rightarrow v(0) \quad = 0 \\ u(l,t) & = w(t)v(l) \quad = 0,\ \forall t \Rightarrow v(l) \quad = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Avec ces conditions, seul le cas $\lambda_x < 0$ conduit à des solutions non nulles

$$\begin{cases} v(0) = 0 & \Rightarrow E \qquad\qquad = 0 \\ v(l) = 0 & \Rightarrow F\sin(\omega_x \frac{l}{c\tau}) \quad = 0 \end{cases} \tag{20}$$

lorsque

$$\sin(\omega_x \frac{l}{c\tau}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{n,x}\frac{l}{c\tau} = n\pi,\ \text{with } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21}$$

Les valeurs propres spatiales sont donc données par $\lambda_{x,n} = -\omega_{n,x}^2 = -(n\pi\frac{c\tau}{l})^2$ et les functions propres spatiales sont donc

$$v_n(x) = F_n \sin(\omega_{n,x}\frac{x}{c\tau}) = F_n \sin(n\pi\frac{x}{l}),\ \ \forall n = 1, 2, 3, ... \tag{22}$$

Les valeurs propres temporelles correspondantes sont données par $\lambda_{t,n} = \lambda_{x,n} - 1 = -(n\pi\frac{c\tau}{l})^2 - 1 < 0$ et les fonctions propres temporelles sont donc

$$w_n(t) = A_n\cos(\omega_{n,t}\frac{t}{\tau}) + B_n\cos(\omega_{n,t}\frac{t}{\tau}) = A_n\cos(\frac{t}{\tau}\sqrt{(n\pi\frac{c\tau}{l})^2+1}) + B_n\sin(\frac{t}{\tau}\sqrt{(n\pi\frac{c\tau}{l})^2+1}) \tag{23}$$

Par linéarité, la solution la plus générale est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x). \tag{24}$$

avec $\omega_n = \frac{1}{\tau}\sqrt{(n\pi\frac{c\tau}{l})^2 + 1}$ et $k_n = \frac{n\pi}{l}$.

(d) La vitesse du n-ième mode est donc donnée par

$$c_n \triangleq \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{\frac{1}{\tau}\sqrt{(n\pi\frac{c\tau}{l})^2+1}}{\frac{n\pi}{l}} \tag{25}$$

$$= \frac{l}{n\pi\tau}\sqrt{(n\pi\frac{c\tau}{l})^2+1} \tag{26}$$

$$= \sqrt{c^2+\left(\frac{l}{n\pi\tau}\right)^2} \tag{27}$$

$$= c\sqrt{1+\left(\frac{l}{n\pi c\tau}\right)^2} \tag{28}$$

$$\Rightarrow \frac{c_n}{c} = \sqrt{1+\left(\frac{l}{n\pi c\tau}\right)^2} \tag{29}$$

Quand $\frac{l}{c\tau} \to 0$, tous les modes se déplacent à la même vitesse c. Lorsque $\frac{l}{c\tau} \approx N\pi$ alors la vitesse de phase des modes $n \leq N$ est plus grande que c. Le nouveau terme $\tau << \infty$ engendre donc de la dispersion.

E2 : Fonctions de Green (10 Points)

Considérer l'équation de Schrödinger en espace libre

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m_0} u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[\tag{$\square$}$$

où $\hbar$ et m_0 sont des constantes réelles strictement positives (respectivement la constante de Planck réduite et la masse) et $i^2 = -1$ est le nombre imaginaire pur.
Considérer aussi la condition initiale

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+a) + \phi(x-a)\right] \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}d} \exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right) \tag{$\dagger$}$$

où d et a sont des constantes réelles strictement positives. En suivant les étapes successives ci-dessous, résoudre l'Éq.($\square$) avec la condition initiale Éq.($\dagger$).

(a) (2 Points) Montrer que l'Éq.($\square$) peut s'écrire sous la forme

$$u_t - \tilde{k} u_{xx} = 0. \tag{$\blacksquare$}$$

Donner l'expression de $\tilde{k}$ en fonction de $\hbar$ et m_0. Quelle est la différence principale avec l'équation de diffusion classique $(u_t - k u_{xx})$?

(b) (5 Points) Résoudre l'Éq.($\blacksquare$) avec la condition initiale

$$u(x,0) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}d} \exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right).$$

Exprimer la solution en fonction de $\sigma(t) \triangleq \sqrt{d^2 + 4\tilde{k}t}$.
Rappel : La fonction de Green associée à l'équation Éq.($\blacksquare$) est

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tilde{k}t}\right)$$

Indice : L'identité suivante peut s'avérer utile

$$\frac{(x-y)^2}{4\tilde{k}t} + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \alpha\,(y-\gamma)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{4\tilde{k}t}\left(\frac{\sigma(t)}{d}\right)^2, \quad \gamma = \left(\frac{d}{\sigma(t)}\right)^2 x \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{x}{\sigma(t)}\right)^2.$$

Indice : L'intégrale de Poisson

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\eta^2\right) d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

peut s'avérer utile.

(c) (3 Points) En utilisant les résultats des deux sous-questions précédentes, donner, en justifiant votre démarche, la solution de l'Éq.($\square$) avec la condition initiale Éq.($\dagger$). Exprimer la solution en fonction de a, σ et $\tilde{k}$.
Indice : Décomposer la solution et la condition initiale en deux, *i.e.* $u_\pm \leftrightarrow \phi(x \pm a)$. Utiliser ensuite le changement de variable $x' = x \pm a$ afin de pouvoir utiliser le résultat de la sous-question (b). Justifier la validité de cette décomposition.

Solution :

(a) De manière immédiate

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m_0} u_{xx} \tag{30}$$

$$i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m_0} u_{xx} = 0 \tag{31}$$

$$u_t + \frac{\hbar}{i2m_0} u_{xx} = 0 \tag{32}$$

$$u_t - \frac{i\hbar}{2m_0} u_{xx} = 0 \tag{33}$$

et $\tilde{k} \triangleq \frac{i\hbar}{2m_0}$ est donc un nombre complexe pur, $\tilde{k} \in i\mathbb{R}^+$.

(b) En utilisant le principe de superposition, la solution générale de l'Éq.(■) est

$$u_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{x-y}{\sqrt{4\tilde{k}t}}\right]^2\right) \phi(y)\mathrm{d}y, \tag{34}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}d} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{x-y}{\sqrt{4\tilde{k}t}}\right]^2\right) \exp\left(-\left[\frac{y}{d}\right]^2\right) \mathrm{d}y, \tag{35}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}d} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\left[y-\gamma\right]^2 - \beta\right) \mathrm{d}y, \tag{36}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}d} \exp\left(-\beta\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\eta^2\right) \mathrm{d}\eta, \tag{37}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}d} \exp\left(-\beta\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{38}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)} \exp\left(-\left[\frac{x}{\sigma(t)}\right]^2\right). \tag{39}$$

(c) Appelons $u_\pm$ les solutions des problèmes

$$(\partial_t - \tilde{k}\partial_{xx})u_\pm = 0 \quad \text{avec} \quad u_\pm(x,0) = \phi(x \pm a). \tag{40}$$

Par linéarité, il apparaît que $u(x,t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$ est la solution de l'Éq.(□) avec la condition initiale Éq.(†). En utilisant le changement de variable $x'_\pm = x \pm a$, ces sous-problèmes se réduisent à

$$(\partial_t - \tilde{k}\partial_{x'x'})u_\pm = 0 \quad \text{avec} \quad u_\pm(x',0) = \phi(x') \tag{41}$$

dont la solution a été calculée à la sous-question (b). La solution finale est donc

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(u_+ + u_-) && (42)\\
&= \frac{1}{2}(u_0(x'_+,t) + u_0(x'_-,t)) && (43)\\
&= \frac{1}{2}(u_0(x+a,t) + u_0(x-a,t)) && (44)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma(t)}\left[\exp\left(-\left[\frac{x+a}{\sigma(t)}\right]^2\right) + \exp\left(-\left[\frac{x-a}{\sigma(t)}\right]^2\right)\right] && (45)
\end{aligned}$$

E3 : Caractéristiques (8 Points)

Considérer l'équation

$$u_x + xu_y = u,$$

définies pour $x,y \in \mathbb{R}$ et assortie de la condition

$$u(1, y) = f(y),$$

avec $f(y)$ une fonction de y.
En utilisant la méthode des caractéristiques

(a) (2 Points) Transformer l'équation aux dérivées partielles en deux équations différentielles ordinaires.

(b) (2 Points) Démontrer que l'équation des caractéristiques est donnée par

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_1 - \frac{1}{2},$$

avec y_1 une constante définie telle que $y_1 \triangleq y(1)$.

(c) (3 Points) Démontrer que la solution de ce problème est donnée par l'expression

$$u(x, y) = f\left(y - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \exp(x - 1). \tag{46}$$

(d) (1 Point) Esquisser les lignes caractéristiques pour $y(0) = -1, 0, 1$.

Solution :

(a) A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dx}[u(x, y(x))] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{47}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dx}[u(x, y(x))] = u, \tag{48}$$

en considérant les dérivées partielles u_x et u_y définies sur les lignes $y(x)$. Dès lors, la solution devient

$$\frac{du}{dx} = u, \tag{49}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|u| = x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \tag{50}$$

$$\Rightarrow \qquad |u| = K\exp(x), \quad K \in \mathbb{R}_0^+, \tag{51}$$

$$\Rightarrow \qquad u(x, y(x)) = \pm K\exp(x), \tag{52}$$

$$\Rightarrow \qquad u(x, y(x)) = K_1\exp(x), \quad K_1 \in \mathbb{R}_0. \tag{53}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dx} = x, \tag{54}$$
$$\Rightarrow \qquad y(x) = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R} \tag{55}$$
$$\tag{56}$$

La constante C_2 est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $x = 1$,

$$y(1) = y_1 = \frac{1}{2} + C_2, \tag{57}$$
$$\Rightarrow \qquad C_2 = y_1 - \frac{1}{2} \tag{58}$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_1 - \frac{1}{2}, \tag{59}$$
$$\Rightarrow \qquad y_1 = y - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, \tag{60}$$
$$\tag{61}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la constante K_1

$$u(y(1), 1) = K_1 \exp(1) = f(y_1), \tag{62}$$
$$\Rightarrow \qquad K_1 = f(y_1) \exp(-1). \tag{63}$$

Finalement, la solution est

$$u(x, y) = f\left(y - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \exp(x - 1). \tag{64}$$

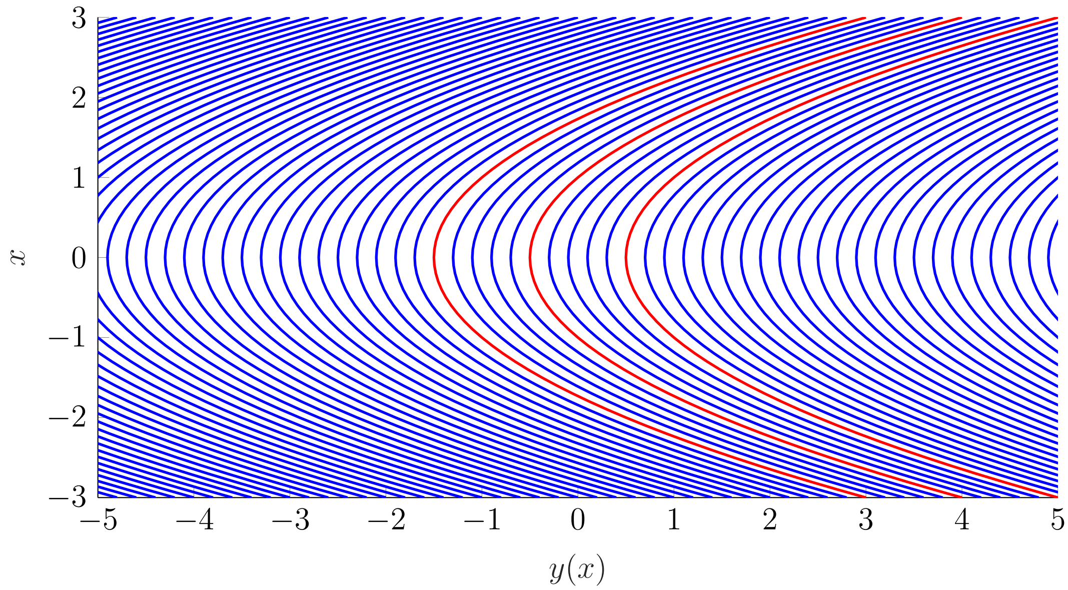

FIGURE 1 – Les lignes caractéristiques demandées sont dessinées en rouge, les autres en bleu.

E4 : Analyse de stabilité (7 Points)

Considérer l'équation de transport

$$u_t + au_x = 0,$$

et la discrétisation suivante

$$u_x \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \text{ et } u_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t},$$

(a) (1 Point) Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

(b) (5 Points) Etablisser le critère de stabilité en utilisant une analyse de Von Neumann.

(c) (1 Point) Interpréter physiquement les conséquences de la condition de stabilité obtenue sur base de ce schéma numérique. Discuter également l'effet du signe du coefficient a sur cette condition.

Solution :

(a) En remplaçant la discrétisation demandée dans l'équation de transport, on obtient l'expression ci-dessous

$$(1 - \alpha)\, u_j^{n+1} + \alpha\, u_{j+1}^{n+1} = u_j^n, \tag{65}$$

avec $\alpha = a\Delta t/\Delta x$.
L'élément j au pas de temps $n + 1$ ne dépend pas uniquement d'éléments aux pas de temps antérieurs (la connaissance de u_{j+1}^{n+1} est également requise). Ce schéma est dès lors implicite.

(b) On introduit un mode d'erreur

$$\epsilon_k(x, t) = \hat{\epsilon}(k, t)\ \exp(ikx) \tag{66}$$

dans l'équation discrète pour obtenir

$$(1 - \alpha)\ \hat{\epsilon}_{n+1} + \alpha\ \hat{\epsilon}_{n+1}\ \exp(ik\Delta x) = \hat{\epsilon}_n. \tag{67}$$

Le critère de stabilité au sens de Von Neumann impose que

$$\left| \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} \right| \leq 1. \tag{68}$$

De façon équivalente

$$\left| \frac{\hat{\epsilon}_{n+1}}{\hat{\epsilon}_n} \right|^2 = \left| \frac{1}{1 - \alpha\ [1 - \exp(ik\Delta x)]} \right|^2 \leq 1, \tag{69}$$

$$\Rightarrow \qquad |1 - \alpha\ [1 - \exp(ik\Delta x)]|^2 \geq 1, \tag{70}$$

$$\Rightarrow \{1 - \alpha\ [1 - \exp(ik\Delta x)]\}\ \{1 - \alpha\ [1 - \exp(-ik\Delta x)]\} \geq 1, \tag{71}$$

$$\Rightarrow \alpha\ [1 - \cos(k\Delta x) + \alpha(\cos(k\Delta x) - 1)] \geq, \tag{72}$$

$$\Rightarrow \alpha[\cos(k\Delta x) - 1][\alpha - 1] \leq 0. \tag{73}$$

Cas 1 : $\alpha > 0$

$$[\cos(k\Delta x) - 1][\alpha - 1] \leq 0 \tag{74}$$

Or

$$\cos(k\Delta x) - 1 \in [-2; 0]. \tag{75}$$

Donc, la condition à vérifier devient

$$\alpha \geq 1. \tag{76}$$

Cas 2 : $\alpha < 0$

$$[\cos(k\Delta x) - 1][\alpha - 1] \geq 0 \tag{77}$$

En appliquant le même raisonnement qu'au cas 1, la condition à vérifier est

$$\alpha \leq 1, \tag{78}$$

et celle-ci est toujours vérifiée.

(c) Pour résumer, si la vitesse de l'onde est positive ($a > 0$), le schéma est conditionnellement stable et la vitesse numérique doit être inférieure à la vitesse physique. Cependant, si la vitesse de l'onde est négative ($a < 0$), le schéma est inconditionnellement stable.