Janvier 2020 - Examen de théorie

Nom :	Prénom :	Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer vos nom et prénom. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'**entièreté du questionnaire**, qui compte 12 pages numérotées de 1 à 12, parmi lesquelles trois sont vierges et peuvent vous servir de feuilles de brouillon. Ces trois feuilles ne seront **pas lues** lors de la correction.*

*On vous demande de fournir des réponses très **concises et spécifiques**. Il ne s'agit pas d'être verbeux, mais de prouver, par des réponses courtes qui vont droit au but, que vous avez atteint un niveau élevé de compréhension de la matière. Des réponses qui contiennent des informations périphériques par rapport à ce qui est demandé seront moins bien évaluées que des réponses en parfaite adéquation avec l'objet de la question.*

*Seules les réponses rédigées **à l'intérieur des cadres** prévus à cet effet seront prises en considération.*

Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Question 1 – Approximation d'une matrice

On considère une matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, avec $n \leq m$. On vous demande d'écrire une approximation A_k de cette matrice, sous la forme d'une somme de k matrices de rang 1, avec $k \leq n$. Cette approximation doit vérifier la propriété suivante :

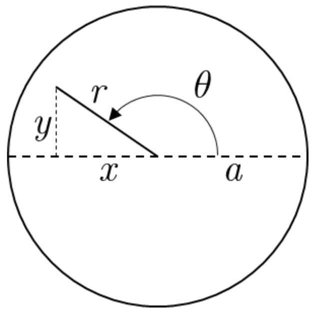
$$\left\|A - A_k\right\|_2 = \min_{\operatorname{rank}(B)=k} \left\|A - B\right\|_2 .$$

Définir très précisément toutes les notations que vous utilisez dans votre réponse. S'il s'agit de matrices ou des vecteurs, précisez systématiquement leurs dimensions (nombre de lignes et de colonnes).

Calculer la valeur de $\|A - A_k\|_2$.

Question 2 – Equation de Laplace

On considère le problème de Dirichlet suivant, dans un domaine constitué d'un disque de rayon a et centré sur l'origine :



$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{pour} \quad x^2 + y^2 < a^2$$

$$u = h(\theta) \qquad \text{pour} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

où $h(\theta)$ désigne une fonction donnée de la coordonnée polaire θ.

1. Sachant qu'en coordonnées polaires (r, θ) l'équation de Laplace prend la forme suivante :

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + r^{-1}\, u_r + r^{-2}\, u_{\theta\theta} = 0,$$

on demande de reformuler cette équation en supposant qu'une solution peut être obtenue par séparation des variables en coordonnées polaires (r, θ). Définissez toutes les notations que vous introduisez.

2. Résoudre pour la partie relative à la variable indépendante θ, et ce **en appliquant** des conditions limites adéquates. Justifier brièvement.

3. En tenant compte de la solution obtenue au point 2 (solution pour la partie relative à θ), on vous demande d'écrire la solution générale obtenue **avant** application des conditions limites relatives à la variable indépendante r.

4. Enoncer la condition limite à utiliser en $r = 0$ et l'utiliser pour particulariser la solution obtenue au point 3.

5. Expliquer brièvement (sans calculs) comment procéder pour appliquer la condition limite non homogène en $r = a$ et comment fixer les valeurs des coefficients qui restent encore indéterminés à la fin du point 4.

6. Après application de toutes les conditions aux limites, la solution complète s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi \, d\phi$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi \, d\phi.$$

On vous demande de donner l'expression de la solution à l'origine ($x = y = 0$), et d'**interpréter**.

Question 3 – Analyse de stabilité (équation du 1^er^ ordre)

Une approximation par différences finies (différence avant pour la dérivée temporelle, différence arrière pour la dérivée spatiale) de l'équation du 1er ordre $u_t + a\ u_x = 0\ (a > 0)$ mène au schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - s\,(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

avec $u_j^n \approx u\,(j\Delta x,\ n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel.

- Donner la signification de la notation s dans le schéma numérique ci-dessus.

- Quel est l'ordre de précision de ce schéma numérique ? Le schéma est-il *explicite* ou *implicite* ?

- Grâce à une analyse de Von Neumann, étudier la stabilité de ce schéma numérique. L'utilisation des formules $\cos(2k) = \cos^2 k - \sin^2 k$ et $\sin(2k) = 2\cos k\ \sin k$ peuvent faciliter vos calculs.

Question 4 – Ondes

Sur l'axe réel ($-\infty < x < +\infty$), on considère l'équation d'onde :

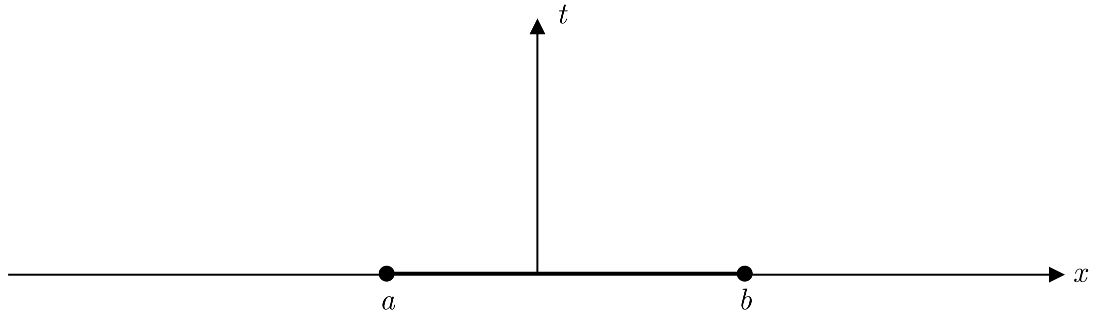
$$u_{tt} = c^2 \, u_{xx}$$

munie des conditions initiales suivantes :

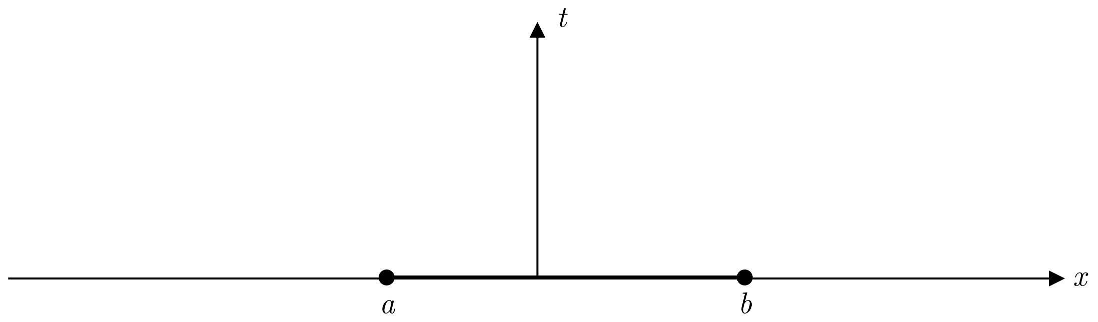
$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{et} \qquad u_t(x, 0) = g(x)$$

avec f et g deux fonctions arbitraires de x, mais suffisamment régulières.

- Sur l'axe $t = 0$, on définit un intervalle $a \leq x \leq b$. On demande de représenter sur le schéma ci-dessous la région de l'espace (x, t) dans laquelle la solution $u(x, t)$ est affectée par les valeurs que prend la fonction f à l'intérieur de l'intervalle $a \leq x \leq b$.



- On demande de représenter sur le schéma ci-dessous la région de l'espace (x, t) dans laquelle la solution $u(x, t)$ est affectée par les valeurs que prend la fonction g à l'intérieur de l'intervalle $a \leq x \leq b$.



- Comment appelle-t-on l'union des deux régions de l'espace que vous avez représentées sur les schémas ci-dessus ?

Question 5 – Gradient conjugué

L'itération de la méthode du gradient conjugué s'écrit sous la forme suivante :

$x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r_0$
for $n = 1, 2, 3, \dots$ **do**

$\alpha_n = \dfrac{r_{n-1}^T r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}}$	step length
$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}$	approximate solution
$r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1}$	residual
$\beta_n = \dfrac{r_n^T r_n}{r_{n-1}^T r_{n-1}}$	
$p_n = r_n + \beta_n p_{n-1}$	search direction

end

Démontrer que

$$\mathscr{K}_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \rangle = \langle r_0, r_1, \dots, r_{n-1} \rangle = \langle b, Ab, \dots, A^{n-1} b \rangle$$